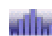
TÉCNICAS DE CONTEO

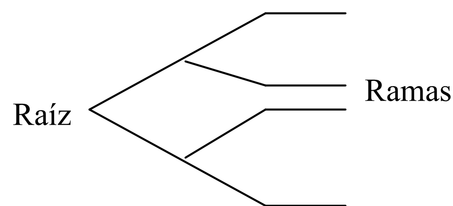
Para determinar el espacio muestral o el tamaño del espacio muestral, es necesario desarrollar algunas técnicas de enumeración las cuales son:

 El Diagrama de Árbol

 Análisis Combinatorio.

DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Los diagramas de árbol son ordenaciones empleadas para enumerar todas las posibilidades lógicas de una secuencia de eventos, donde cada evento puede ocurrir en un número finito. Proporcionan un método sistemático de enumeración objetiva de los resultados.



A continuación, se presenta un Diagrama de Árbol, referente a las respuestas que se pueden dar a tres preguntas de Verdadero o Falso.

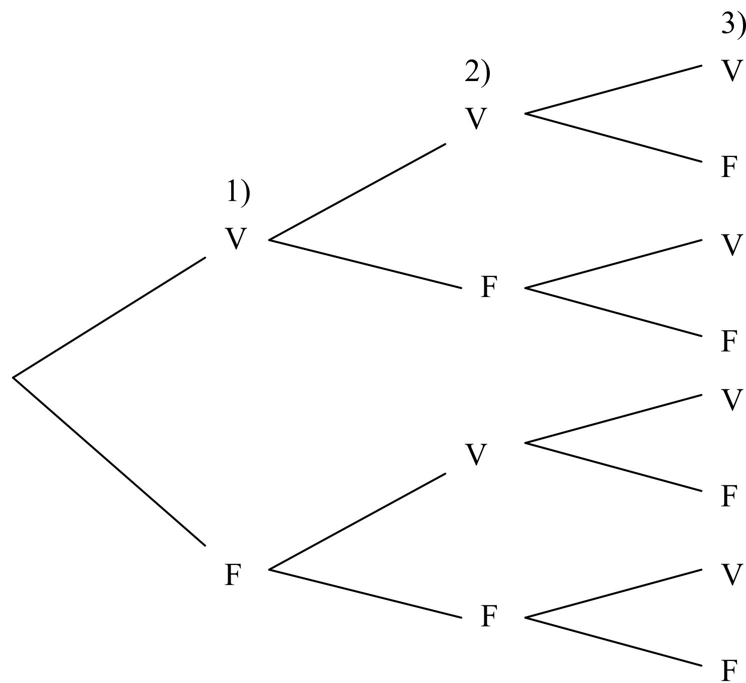
Tenemos dos opciones posibles para cada pregunta, V o F el árbol presenta dos ramas en cada pregunta.

1) *La teoría de conjuntos fue desarrollada por G. Cantor.*
a) V b) F

2) *G. Cantor es de origen francés.*
a) V b) F

3) *La teoría de conjuntos sirve para simplificar la Estadística.*

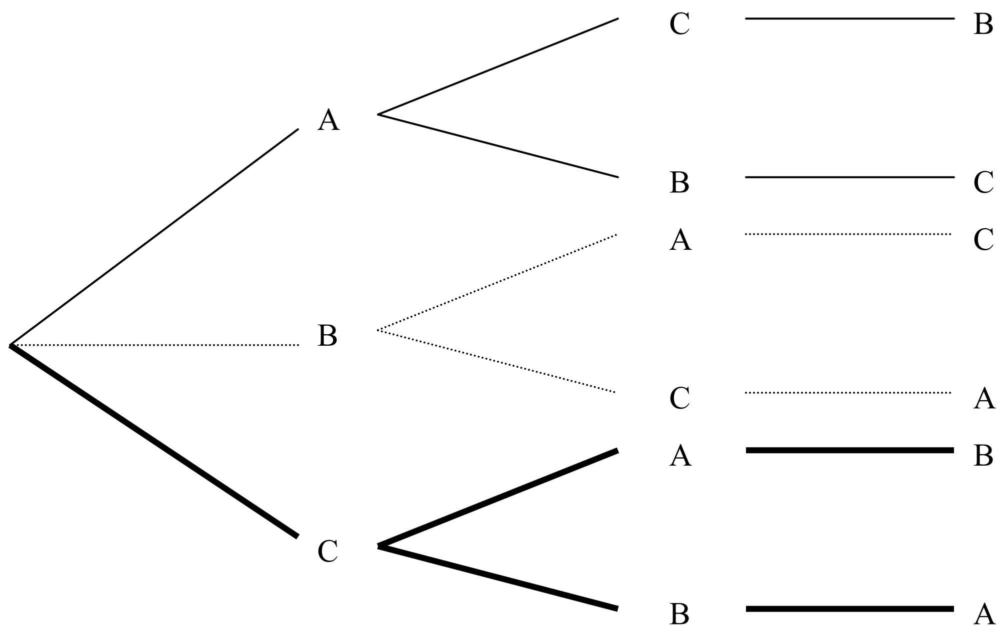
a) V b) F



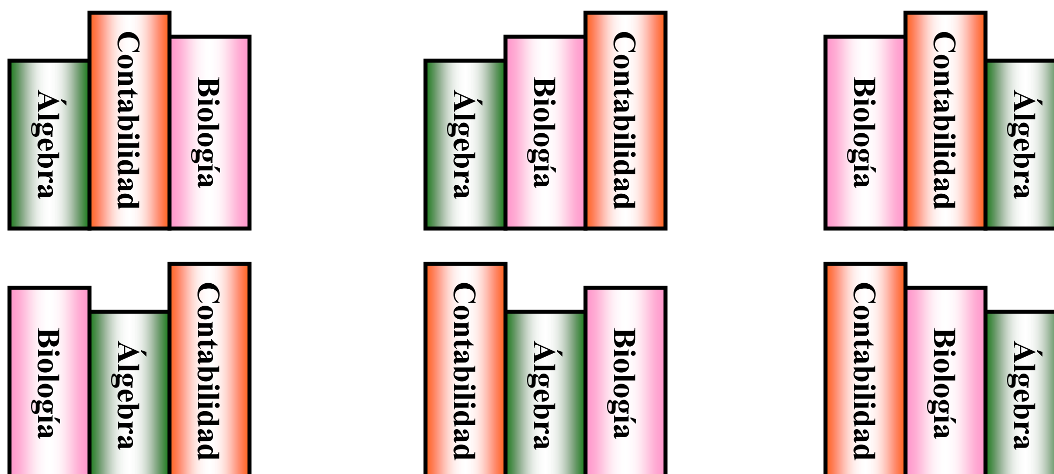
Las diferentes formas en que se puede contestar son ocho y forman el espacio muestral.

S = {VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF}

Se tienen en un estante 3 libros uno de Álgebra, otro de Contabilidad y otro de Biología. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar los libros?



{ACB, ABC, BCA, BAC, CAB, CBA}



ANÁLISIS COMBINATORIO

Los diagramas de árbol muestran objetivamente el número de resultados posibles en que se puede disponer de la ordenación de un conjunto de elementos, pero esta enumeración es limitada, pues a medida que aumenta el número de objetos dicha ordenación se complica, por lo que hay que utilizar otro procedimiento más sencillo para determinar el número total de resultados. Con este fin, nos apoyaremos en los conceptos *permutaciones* y *combinaciones*, los cuales tienen como base el principio fundamental del conteo.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE CONTEO

Si un evento **A** puede ocurrir de $\mathbf{n_1}$ maneras, y una vez que este ha ocurrido, otro evento **B** puede ocurrir de $\mathbf{n_2}$ maneras diferentes, entonces el número total de formas diferentes en que ambos eventos pueden ocurrir en el orden indicado, es igual a $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$.

¿De cuántas maneras pueden repartirse 3 premios a un conjunto de 10 personas, suponiendo que cada persona no puede obtener más de un premio?

Aplicando el principio fundamental del conteo, tenemos 10 personas que pueden recibir el primer premio. Una vez que éste ha sido entregado, restan 9 personas para recibir el segundo, y posteriormente quedarán 8 personas para el tercer premio. De ahí que el número de maneras distintas de repartir los tres premios.

$$\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} \times \mathbf{n_3}$$

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

¿Cuántas placas de automóvil se pueden hacer utilizando dos letras seguidas de tres cifras? No se admiten repeticiones.

$$26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 = 468000$$

El símbolo ! se lee *factorial* y es el producto resultante de todos los enteros positivos de 1 a n; es decir, sea **n** un número entero positivo, el producto **n** (**n**-1) (**n**-2)...3 x 2 x 1 se llama factorial de n.

$$\mathbf{n}! = \mathbf{n}\,(\mathbf{n}-1)\,(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Por definición $0! = 1$

PERMUTACIONES

Una permutación de un conjunto de elementos, es un ordenamiento específico de todos o algunos elementos del conjunto, facilita el recuento de las ordenaciones diferentes que pueden hacerse con los elementos del conjunto.

Nota: En una permutación el orden en que se disponen los elementos del conjunto es importante.

PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS

Por el principio fundamental del conteo podemos enunciar que el número de permutaciones de **n** objetos distintos tomados de **n** en **n**, es:

$${}_{\mathbf{n}}P_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}!$$

Se quiere conocer el conjunto de todas las disposiciones posibles de tres personas colocadas en hilera para tomar una fotografía.

$${}_3P_3 = 3! = 6$$

Cinco personas desean nombrar un Comité Directivo compuesto de un presidente, un vicepresidente, un secretario, un tesorero y un vocal. ¿Cuántas maneras hay de constituir el comité?

$${}_5P_5 = 5! = 120$$

Hay seis banderas de distintos colores. ¿Cuántas señales diferentes se pueden enviar usando las seis banderas al mismo tiempo?

$${}_6P_6 = 6! = 720$$

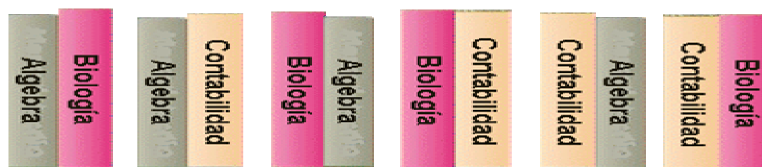
PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS EN DIFERENTES GRUPOS DE r ELEMENTOS.
Podemos calcular el número de permutaciones $_n P_r$, de **n** elementos, tomados en grupos o subconjuntos de **r** elementos.

$$_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Si de un estante tomamos 2 de 3 libros ¿Cuántas permutaciones pueden realizarse?



$$_3 P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$$



¿Cuántas ternas pueden formarse con las 26 letras del alfabeto, si cada letra sólo puede utilizarse una sola vez?

$$_{26} P_3 = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!} = 15600$$

Cinco personas entran a una sala en la que hay 8 sillas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocupar las sillas?

$$_8 P_5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 6720$$

PERMUTACIONES DONDE NO TODOS LOS ELEMENTOS SON DIFERENTES.
Si los elementos de un conjunto no son todos diferentes entre sí, es decir, algunos de los elementos son idénticos, la fórmula de las permutaciones presenta un nuevo aspecto.

El número de permutaciones que se pueden formar en el caso de **n** elementos, cuando hay **n1** elementos idénticos, **n2** elementos de otro tipo idénticos, etcétera, es:

$$_n P_{n1, n2, \ldots, nk} = \frac{n!}{n1!\, n2! \ldots nk!}$$

¿Cuántas palabras diferentes de cuatro letras pueden formarse con las letras LULU?

$$ {}_{4}P_{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 6 $$

S = {LLUU, LULU, UULL, ULUL, LUUL, ULLU}

¿Cuántas palabras de once letras pueden formarse con la palabra Mississippi?.

$$ {}_{11}P_{4,4,2,1} = \frac{11!}{4!\,4!\,2!\,1!} = 34650 $$

¿Cuántos mensajes pueden enviarse con diez banderas utilizándolas todas, si son cuatro negras, tres verdes y tres rojas?

$$ {}_{10}P_{4,3,3} = \frac{10}{4!\,3!\,3!} = 4200 $$

PERMUTACIONES CIRCULARES

Cuando los elementos se encuentran dispuestos en forma circular tenemos:

$$ {}_{\mathbf{n}}Pc = (\mathbf{n} - 1)! $$

¿De cuántas maneras podemos ordenar 5 llaves en un llavero?

$$ {}_{5}Pc = (5 - 1)! = 4! = 24 $$

COMBINACIONES

Ya sabemos que en una permutación el orden de los elementos es importante, pero cuando el orden de colocación carece de importancia, a la disposición de dichos elementos se le denomina combinación.

Por lo tanto, una combinación es un subconjunto o una disposición de todos los elementos de un conjunto, sin tener en cuenta el orden de ellos.

El número de combinaciones o subconjuntos no ordenados, cada uno formado por **r** elementos, que pueden obtenerse de un conjunto de **n** elemento es:

$$ {}_{\mathbf{n}}C_{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n} - \mathbf{r})!\,\mathbf{r}!} \quad \text{o} \quad \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n} - \mathbf{r})!\,\mathbf{r}!} $$

Si de un estante tomamos 2 de 3 libros, ¿Cuántas combinaciones pueden realizarse?

$$_3C_2 = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{6}{2} = 3$$



Por lo tanto, el resultado se reduce a 3 posibles formas ya que en una combinación el orden de los elementos no es importante.

Se tienen cinco obreros para un trabajo especial que requiere de tres de ellos. ¿De cuántas maneras diferentes se puede seleccionar un equipo de tres?

$$_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{120}{12} = 10$$

De un club de 20 socios, se van a seleccionar 3 para formar la mesa directiva. ¿De cuántas formas puede constituirse?

$$_{20}C_3 = \frac{20!}{(20-3)!\,3!} = \frac{20!}{17!\,3!} = \frac{6840}{6} = 1140$$

Es conveniente observar que:

$$_{\mathbf{n}}C_{\mathbf{r}} = _{\mathbf{n}}C_{\mathbf{n-r}}$$

Así:

$$_{100}C_{98} = _{100}C_{100-98} = _{100}C_2$$

FÓRMULA DEL BINOMIO

$$(a+b)^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{n}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} a^{\mathbf{n-r}} b^{\mathbf{r}}$$